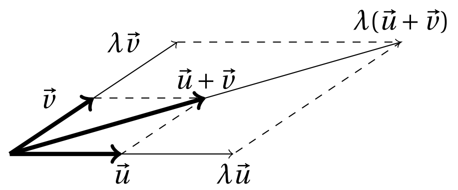
Chapitre2

ALGÈBRE LINÉAIRE - RAPPELS ET COMPLÉMENTS

1. Espaces vectoriels

On ne vérifie presque jamais qu'un ensemble est un espace vectoriel. On s'assure que c'est un sous-espace vectoriel d'un des espaces vectoriels de référence. Un sous-espace vectoriel est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel. C'est pourquoi on ne rappelle pas la définition formelle, la notion clé est la notion de **stabilité par combinaisons linéaires**.



DÉFINITION

Soit E un espace vectoriel, $p\in\mathbb{N}^*$, $(v_1,\dots,v_P)\in E^p$, $u\in E$ et $F,G\subset E$.

- **combinaisons linéaires :** $u=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i v_i$ avec $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p$
- **sous espace vectoriel :** $F\subset E$ vérifiant 1) $0_E\in F$ et 2)

  stabilité par CL : $\forall(u,v)\in F^2,\quad \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\quad \lambda u+\mu v\in F$
- **sous espace vectoriel triviaux :** $\{0_E\}$ et E
- **sous espace vectoriel engendré :**

$$\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)=\left\{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i v_i \;\middle|\; (\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p\right\}$$

- **famille génératrice :** $(v_1,\dots,v_p)$ est génératrice de $F \iff F=\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)$
- **famille libre :** $(v_1,\dots v_p)$ est libre $\iff \left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i v_i=0_E \implies \lambda_1=\dots=\lambda_p=0\right)$

  $\rightsquigarrow$ il s'agit de démontrer une **implication**
- **famille liée :** $(v_1,\dots v_p)$ est liée $\iff$ l'un des v_i est CL des autres vecteurs
- **base :** $\mathscr{B}=(v_1,\dots v_n)$ est une base $\iff \mathscr{B}$ est libre et génératrice
- **coordonnées dans une base :** $Mat_{\mathscr{B}}(u)=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$ tel que u s'écrit $u=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i$ de façon unique dans $\mathscr{B}$
- **matrice des coordonnées dans une base :**

$$Mat_{\mathscr{B}}(v_1,\dots,v_p)=\big(Mat_{\mathscr{B}}(v_1)|\dots|Mat_{\mathscr{B}}(v_p)\big)$$

- **dimension :** toutes les bases de E ont le même cardinal, noté $dim(E)$
- **droite vectorielle :** s.e.v. de dimension 1 $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Vect}(u)=\{\lambda u\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\}$ avec $u\neq 0$
- **plan vectoriel :** s.e.v. de dimension 2 $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Vect}(u,v)=\{\lambda u+\mu v\,|\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$ avec (u,v) non colinéaires
- **rang d'une famille :** $rg(v_1,\dots,v_p)=dim\big(\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)\big)$

EXERCICE 1. Soit $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}$. On considère $F=\mathrm{Vect}\big((A^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$. Montrer que F est un s.e.v de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par (I_2,A). *Hint : calculer A^2.*

PROPRIÉTÉ 1 (ESPACES VECTORIELS DE RÉFÉRENCES)

Les ensembles suivants sont des espaces vectoriels pour leurs opérations naturelles :

- $\mathbb{R}^n$: n-uplets de réels **base canonique :** $e_i = (0\dots,0,\underset{\substack{i\text{-ème}\\ \text{place}}}{1},0,\dots,0)$, $i \in [\![1;n]\!]$

  dimension finie : $dim\left(\mathbb{R}^n\right) = n$.

- $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: matrices réelles $n \times p$

  base canonique : $E_{i,j} = \left(\delta_{i,j}(k,\ell)\right)_{(k,\ell)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$, $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$

  où $\delta_{i,j}(k,\ell) = \begin{cases} 1 & \text{si } (k,\ell) = (i,j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est le symbole de Kronecker

  dimension finie : $dim\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})\right) = n \times p$.

- $\mathbb{R}_n[x]$: fonctions polynômiales de degré $\leqslant n$ **base can. :** $\left(e_i : x \mapsto x^i\right)_{i\in[\![0;n]\!]}$

  dimension finie : $dim\left(\mathbb{R}_n[x]\right) = n+1$.

- $\mathbb{R}[x] = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbb{R}_n[x]$: fonctions polynomiales **base canonique :** $\left(e_i : x \mapsto x^i\right)_{i\in\mathbb{N}}$.

  dimension infinie : $dim\left(\mathbb{R}[x]\right) = +\infty$.

- $\mathscr{F}(I,\mathbb{R}) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}\}$: espace des fonctions réelles définies sur $I \subset \mathbb{R}$

  pas de base canonique et **dimension infinie**

- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\}$: espaces des suites réelles.

  pas de base canonique et **dimension infinie**

remarque : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un cas particulier de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ avec $I = \mathbb{N}$

Cas du vecteur nul :

Le vecteur nul 0_E change de forme selon l'espace :

- $0_{\mathbb{R}^n} = (0,\dots,0)$ (vecteur nul)
- $0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})} = 0_{n,p}$ (matrice nulle)
- $p = 0_{\mathbb{R}_n[x]} \iff \forall x \in \mathbb{R},\quad p(x) = 0$ (polynôme nul)
- $f = 0_{\mathscr{F}(I,\mathbb{R})} \iff \forall x \in I,\quad f(x) = 0$ (fonction nulle)
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \iff \forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = 0$ (suite nulle)

EXERCICE 2.

1. Montrer que ces ensembles sont des s.e.v de E :
   (a) $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; 3x+2y = z\right\}$ et $E = \mathbb{R}^3$.
   (b) $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n et $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (c) $\mathscr{N}$ l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang et $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   (d) $\mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (plus généralement les espaces $\mathscr{C}^k([0;1],\mathbb{R})$ des fonctions de classes $\mathscr{C}^k$ sur $[0;1]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$)
2. Montrer que ces sous-ensembles ne sont pas des sous-espaces vectoriels E.
   (a) $F = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\ ;\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0\}$ et $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   (b) $F = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\right\}$ et $E = \mathbb{R}^n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 = y^2\right\}$ et $E = \mathbb{R}^2$.

PROPRIÉTÉ 2 (QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES SUR $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)$)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(v_1,\dots,v_p) \in E^p$.

- **s.e.v :** $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)$ est un s.e.v de E
- **invariance de** Vect **:** $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)$ est inchangé si on permute les vecteurs, si on multiplie l'un d'eux par un scalaire non nul, si on ajoute à l'un une CL des autres, ou si on supprime un vecteur qui est déjà CL des autres.
- **définition alternative de** Vect **:** $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)$ est le plus petit s.e.v de E (au sens de l'inclusion) contenant la famille $(v_1,\dots,v_p)$ (permet de généraliser à une famille quelconque).

EXERCICE 3. Soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que (u,v,w) est génératrice de $\mathbb{R}^3$ avec $u = e_1+e_2+e_3$, $v = e_1-e_2+e_3$, $w = e_2+e_3$. Est-elle libre ?

EXERCICE 4. Soit $F = \left\{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = 0\right\}$.
Montrer que F est un s.e.v de $\mathbb{R}_3[x]$ de deux façons différentes (par stabilité et en exhibant une famille génératrice).
Déterminer une base et la dimension de F.

REMARQUE 1.
Le rang d'une famille est la dimension du s.e.v engendré, il mesure en quelque sorte la « taille effective » après suppression des *relations linéaires*. La plupart du temps, on calculera le rang d'une famille de vecteurs par un calcul de rang matriciel au moyen de la matrice des coordonnées des vecteurs dans une base $\mathscr{B}$ de E.

Propriété 3 (calcul du rang)

Soit E un e.v. de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E et $(v_1,...,v_p) \in E^p$ une famille de vecteurs de E.

$$rg\left(\underbrace{v_1,...,v_p}_{\text{famille de } \vec{v} \text{ de } E}\right) = rg\left(\underbrace{Mat_{\mathscr{B}}(v_1),...,Mat_{\mathscr{B}}(v_p)}_{\text{famille de } \vec{v} \text{ de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right) = rg\left(\underbrace{Mat_{\mathscr{B}}(v_1,...,v_p)}_{\text{matrice de } \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})}\right)$$

- le rang matriciel est invariant par opérations du **pivot de Gauss**
- le rang matriciel est invariant par **transposition**.
- si $dim(E) = n$ alors on a $rg(v_1,...,v_p) \in [\![0;\min(n,p)]\!]$.

Exercice 5.

1. Déterminer selon la valeur de $t \in \mathbb{R}$ le rang de la famille $\big((t,0,1),(2t,1,-1),(1,-1,t),(0,-t,1)\big)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer selon la valeur de $a \in \mathbb{R}$ le rang de la famille $\big(a+x+x^2, 1-ax+x^2, 2+ax\big)$ dans $\mathbb{R}_2[x]$

Propriété 4 (Caractérisations pratiques de la liberté)

1. Toute sous-famille d'une famille libre est libre ; toute sur-famille d'une famille liée est liée.
2. **Petites familles :**
   — (v) est libre $\iff v \neq 0_E$;
   — (v_1,v_2) est libre $\iff v_1$ et v_2 sont **non-colinéaires** ;
   — (v_1,v_2,v_3) est liée $\iff$ ils sont **coplanaires** ($v_3 \in \text{Vect}(v_1,v_2)$ ou (v_1,v_2) liée).
3. **Avec le rang :** $(v_1,...,v_p)$ est libre $\iff rg(v_1,...,v_p) = p$
4. **Echelonnage :** une famille est libre $\iff$ la matrice $Mat_{\mathscr{B}}(v_1,...,v_p)$ peut s'**échelonner**, c'est à dire se transformer par opérations du pivot de Gauss en une matrice faisant apparaître un bloc triangulaire bordé de coefficients tous non nuls.
   $\rightsquigarrow$ **dans** $\mathbb{R}[x]$ **(degrés distincts)** : toute famille de polynômes non nuls à degrés distincts est libre ;
   <u>en particulier :</u> une famille $(p_0,\dots,p_n)$ avec $\deg p_k = k$ est libre.

Exercice 6. On considère dans $\mathbb{R}_3[x]$ la famille $F = \text{Vect}(p_1,p_2,p_3,p_4)$ définie par :

$$p_1 : x \mapsto x^3 - x^2 + 2x - 1, \quad p_2 : x^3 + x^2 - x + 1, \quad p_3 : x \mapsto 2x^3 + 3x - 2, \quad p_4 : x^2 - x + 1.$$

1. Calculer le rang de la famille (p_1,p_2,p_3,p_4).
2. La famille(p_1,p_2,p_3,p_4) est-elle libre ? génératrice de $\mathbb{R}_3[x]$?
3. Extraire de (p_1,p_2,p_3,p_4) une base de F et déterminer $\dim(F)$.
4. Montrer que $q : x \mapsto 2x^3 - x^2 + 5x - 3$ appartient à F et donner ses coordonnées dans la base extraite.

Propriété 5 (cardinal et dimension)

Soit E un e.v. de dimension finie et $\mathscr{B}$ une famille finie de vecteurs de E telle que :

$$\boxed{card(\mathscr{B}) = dim(E)}.$$

$\mathscr{B}$ est une base de $E \iff \mathscr{B}$ est libre $\iff \mathscr{B}$ est génératrice $\iff rg(\mathscr{B}) = dim(E)$.

Exercice 7. Soit E un espace de dimension 3 et (e_1,e_2,e_3) une base de E et :

$$u = e_1 + e_2 + e_3, \quad v = e_1 - e_2 + e_3, \quad w = e_2 + e_3.$$

Montrer que (u,v,w) est une base de E.

Propriété 6 (Inclusion et dimension)

On suppose ici E de **dimension finie** et F, G sont des s.e.v de E.

- $F \subset G \Rightarrow dim(F) \leqslant dim(G)$
- si $F \subset G$ alors $F = G \iff dim(F) = dim(G)$.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose :

$$u_1 = (1,1,0), \quad u_2 = (0,1,1), \quad v_1 = (1,2,1), \quad v_2 = (1,0,-1).$$

1. Vérifier que (u_1,u_2) et (v_1,v_2) sont des familles libres de $\mathbb{R}^3$.
2. Exprimer v_1 et v_2 en fonction de u_1 et u_2. En déduire une inclusion entre $\text{Vect}(v_1,v_2)$ et $\text{Vect}(u_1,u_2)$.
3. Conclure que $\text{Vect}(u_1,u_2) = \text{Vect}(v_1,v_2)$.
4. *Variante.* Retrouver le résultat en calculant le rang de la famille (u_1,u_2,v_1,v_2) par pivot de Gauss.

2. Applications linéaires

Les applications linéaires jouent un rôle clé, ce sont les applications « compatibles » avec la structure d'e.v au départ et à l'arrivée. Elles envoient combinaisons linéaires sur combinaisons linéaires.

DÉFINITION

E et F désignent des espaces vectoriels.

- Une **application linéaire de** E **dans** F est une application $f : E \longrightarrow F$ vérifiant :
$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$
L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$.
$\rightsquigarrow$ si f est linéaire on a : $f(0_E) = 0_F$ et $f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(v_i)$
Cas particuliers :
  . $F = E$: f est un **endomorphisme** de E; on note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E
  . $F = \mathbb{R}$: f est une **forme linéaire** sur E; on note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E
  . f bijective : on dit que f est un **isomorphisme**.
  . $F = E$ **et** f bijective : f est un **automorphisme** de E, on note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.
- **noyau :** $\text{Ker}\,(f) = \{u \in E \,|\, f(u) = 0_F\}$ est un s.e.v de E.
- **image :** $\text{Im}(f) = \{f(u) \,|\, u \in E\}$ est un s.e.v de F.
$\rightsquigarrow$ $\mathbf{Im}(f) = \mathbf{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ si $dim(E) = n$ et $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E.
- **rang :** $rg(f) = dim(\text{Im}(f))$.
- **puissances d'endomorphismes :** $f \in \mathscr{L}(E)$, $f^0 = id_E$ et $f^k = \underbrace{f \circ ... \circ f}_{k \text{ fois}}$
- **polynôme d'endomorphismes :**
$f \in \mathscr{L}(E)$ et $p \in \mathbb{R}[x]$ tel que $p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ alors $p(f) = \sum_{k=0}^{m} a_k f^k$.
- **polynôme annulateur de** f **:** $p \in \mathbb{R}[x]$ tel que $p(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
- **homothétie :** λid_E avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(id_E : u \mapsto u) \in \mathscr{L}(E)$
- **projecteur de** $E = F \oplus G$ **sur** F **parallèlement à** G **:** $p : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u = x_F + x_G & \mapsto & x_F \end{array}$.

EXERCICE 9. On considère l'application $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :
$$f(M) = AM - MB \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\text{Im}(f)$ et en donner une base.
3. Caractériser les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifiant $AM = MB$, puis donner une base de $\text{Ker}\,(f)$.

EXERCICE 10. Pour $p \in \mathbb{R}_3[x]$, on pose $g(p) : x \mapsto (x+1)p'(x) - p(x)$.

1. Montrer que $p \mapsto g(p)$ définit un endomorphisme g de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Préciser $\text{Ker}\,(g)$ et $\text{Im}(g)$ en donnant une base de chacun.

EXERCICE 11. On considère l'application $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par :
$$f\big((u_n)_{n \geqslant 0}\big) = (u_{n+3})_{n \geqslant 0}.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}\,(f)$.
3. Déterminer $\text{Im}(f)$.

PROPRIÉTÉ 7 (PROPRIÉTÉS OPÉRATOIRES)

- **structure d'e.v :**
  1. $\mathscr{L}(E,F)$ est un e.v. (somme et produit externe d'applications linéaires).
  2. en dimension finie : $dim\big(\mathscr{L}(E,F)\big) = dim(E) \times dim(F)$.
- **composition :** la composée d'applications linéaires, lorsqu'elle est possible, est linéaire.
- **polynômes :** deux polynômes en f commutent. En particulier $p(f) \circ f = f \circ p(f)$.
- **bijectivité :** la réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.
- **binôme de Newton :** si $f \circ g = g \circ f$ (f et g commutent) :
$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}.$$

EXERCICE 12. Soient E un e.v, $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}\,(g)$ si et seulement si $g \circ f = 0$.

EXERCICE 13. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires. Montrer que $\text{Ker}\,(f) \subset \text{Ker}\,(g \circ f)$ et que $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.

Propriété 8 (injectif/surjectif/bijectif)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- **injectif :** f est injective $\iff$ Ker $(f) = \{0_E\}$.
- **surjectif :** f est surjective $\iff$ $\mathrm{Im}(f) = F \iff rg(f) = dim(F)$.
- **THÉORÈME DU RANG :** si E est de dimension finie : $\dim \mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{rg}(f) = \dim E$.
- **caractérisation des iso/auto-morphismes :**
  soient E, F de dimensions finies tels que $dim(E) = dim(F) = n$.

$$f \text{ est un } \underbrace{\text{isomorphisme}}_{\text{automorphisme si } E=F} \iff f \text{ est } \underbrace{\text{injectif}}_{\mathrm{Ker}\,(f)=\{0_E\}} \iff f \text{ est } \underbrace{\text{surjective}}_{rg(f)=n}$$

Exercice 14. 1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ défini par $f_A(M) = AM$. Montrer que f_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer son automorphisme réciproque.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On note $g_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ défini par $g_A(M) = AM - MA$.
   (a) Calculer les images par g_A de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire $rg(g_A)$, $dim(\mathrm{Ker}\,(g_A))$ puis une base de Ker (g_A).
   (c) g_A est-il injectif ? Surjectif ? Bijectif ?

Exercice 15. Montrer que pour tout $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$, l'application $h : M \mapsto PMP^{-1} - M$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui n'est jamais bijectif, quel que soit P. Montrer en revanche que $h + id \in \mathbf{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Théorème 9 (caractérisation des hyperplans)

H est un hyperplan de $E \iff H = \mathrm{Ker}\,(\varphi)$ où $\varphi \in E^*$ est une forme linéaire non nulle sur E.

Exercice 16. On considère $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, et l'application :

$$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

1. Montrer que φ est une forme linéaire non nulle sur E.
2. En déduire que $H = \mathrm{Ker}\,(\varphi) = \left\{ f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\}$ est un hyperplan de E.
3. Montrer que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(\mathbf{1})$ où $\mathbf{1}$ désigne la fonction constante égale à 1.
4. Soit $g : t \mapsto t^2 - t$. Vérifier que $g \in H$.
5. Soit $h : t \mapsto e^t$. Décomposer h selon $H \oplus \mathrm{Vect}(\mathbf{1})$.

3. Matrice d'une application linéaire

La donnée d'une application linéaire sur les vecteurs d'une base de l'espace de départ, détermine l'application de façon unique. Cette remarque est la base de la notion de matrice d'une application linéaire, notion reliant les calculs *vectoriels* sur lesquels agit l'application et les calculs *matriciels* sur lesquels agit sa matrice.
Dans toute la suite, on se donne E et F des e.v de dimensions finies n et p et $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ deux bases bases fixées de E et F.

Définition

La **matrice de** $f \in \mathcal{L}(E,F)$ **dans les bases** $(\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F)$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(f) \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$, est la matrice des coordonnées dans la base $\mathscr{B}_F$ des images par f des vecteurs de la base $\mathscr{B}_E$.
Autrement dit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(f) = \left(Mat_{\mathscr{B}_F}(f(e_1)) | \ldots | Mat_{\mathscr{B}_F}(f(e_n)) \right)$$

a pour j-ième colonne le vecteur $Mat_{\mathscr{B}_F}(f(e_j))$ des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_F$.

$\rightsquigarrow$ **Notation allégée :** pour $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $\mathscr{B}_E = \mathscr{B}_F = \mathscr{B}$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_E}(f)$.

Remarque 2.
Si B et B' sont deux bases de E, la matrice $M_{B',B}(id_E)$ de l'endomorphisme identité dans les bases B et B' joue un rôle important par la suite ($\rightsquigarrow$ voir changement de base)

Exercice 17. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de E et F respectives :

1. $E = F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $f : M \mapsto AM - MA$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $E = \mathbb{R}_3[x]$, $F = \mathbb{R}^4$ et $f : p \mapsto \big(p(-1), p(0), p(1), p(2)\big)$

Propriété 10 (relation vectoriel ↔ matriciel)

On suppose les matrices des application linéaires bien définies

1. **image d'un vecteur :** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(u)$
2. **opérations :** $\mathrm{Mat}(f+g) = \mathrm{Mat}(f) + \mathrm{Mat}(g)$, $\mathrm{Mat}(g \circ f) = \mathrm{Mat}(g) \times \mathrm{Mat}(f)$.
3. **rang :** $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\big(\mathrm{Mat}\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E(f)\big)$.
4. **bijectivité** : f est un isomorphisme $\iff$ $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(f)$ est inversible
(si $n = p$)
et dans ce cas $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f^{-1}) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(f)\big)^{-1}$.

Exercice 18. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ telle que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

On pose $u_1 = (1,-2,1,0)$, $u_2 = (2,-3,0,1)$, $u_3 = (1,2,3,4)$, $u_4 = (1,1,1,1)$.

1. Montrer que (u_3, u_4) une base de Imf.
2. Montrer que (u_1, u_2) est une base de $ker f$.
3. Montrer que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
4. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ a la forme suivante :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} 0_2 & 0_2 \\ \hline 0_2 & N \end{array}\right) \qquad \text{avec } N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Exercice 19. On considère $E = Vect(\cos, \sin)$ comme s.e.v de l'espace des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit Δ l'endomorphisme de dérivation des fonctions de E, défini par $\Delta(f) = f'$.

1. Justifier succinctement que Δ est un endomorphisme de E.
2. Montrer que $(\cos, \sin)$ est une base de E.
3. Déterminer la matrice A de Δ dans la base $(\cos, \sin)$.
4. Montrer que Δ est un automorphisme de E.
5. Déterminer A^2 puis en déduire A^k en fonction de $k \in \mathbb{N}$ puis de $k \in \mathbb{Z}$.
Hint : étudier le reste de la division euclidienne de k par 4.
6. On note $f(x) = cos(x) - \sin(x)$. Expliquer comment calculer $f^{(n)}$ à l'aide de A puis en déduire $f^{(2026)}(x)$.

4. Changement de base, matrices semblables

Jusqu'ici, la matrice d'un endomorphisme dépendait du choix d'une base. Quel est le lien entre deux matrices d'un même endomorphismes dans des bases différentes ? C'est ce que cette section se propose d'étudier.

Définition (Matrice de passage)

Soit E est un e.v de dimension $n \geqslant 1$, $\mathscr{B}$ une bases de E et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une famille de vecteurs de E de même cardinal que et $\mathscr{B}$.
La **matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$**, notée $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ des coordonnées de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Remarque 3.
1) La j-ième colonne de $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ correspond donc à $Mat_{\mathscr{B}}(e'_j)$; le vecteur colonne des coordonnées de e'_j dans la base $\mathscr{B}$.
2) Ne pas confondre la matrice de changement de bases avec celle d'un endomorphisme f dans des bases différentes de E.
3) On peut tout de même dire que $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(id_E)$.

Propriété 11 (détection de bases)

- pour toute base $\mathscr{B}$ de E on a : $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = I_n$
- pour $\mathscr{B}, \mathscr{B}', \mathscr{B}''$ des bases de E on a :$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \cdot P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}$
- $\mathscr{B}'$ est une base de $E \iff P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et dans ce cas $\big(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\big)^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.

Exercice 20.

1. Déterminer la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$ à la famille $\big(x^2+x+1, 1, x^3-x+2, 2x(x-1)(x-3)\big)$.
2. Cette famille est-elle une base de $\mathbb{R}_3[x]$?

Exercice 21.
Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la famille $\mathscr{B}_\alpha = \big((1,\alpha,1), (-1,1,0), (-\alpha,0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
On étudiera le rang d'une matrice notée P_α.

Théorème 12 (Formules de changement de base)

On note $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

1. **changement de coordonnées d'un vecteur :** en notant $X = Mat_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = Mat_{\mathscr{B}'}(x)$ on a :
$$X' = P^{-1}X \iff X = PX'.$$
2. **changement de base sur un endomorphisme :** en notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ on a :
$$B = P^{-1}AP \iff A = PBP^{-1}.$$

Exercice 22. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Montrer que si on pose $u = (1,2)$ et $v = (1,-1)$ alors (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base (u,v).

Définition (Matrices semblables)

A est **semblable** à $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ s'il existe $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $B = P^{-1}AP$.

$\rightsquigarrow$ *reformulation importante :* Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Remarque 4.
La relation de similitude est une relation d'équivalence au sens suivant :

— **reflexive :** A est semblable à elle-même (prendre $P = I_n$ inversible)

— **symétrique :** A est semblable à $B \iff B$ est semblable à A (évident prendre $Q = P^{-1}$ inversible)

— **transitive :** $\begin{cases} A \text{ est semblable à } B \\ B \text{ est semblable à } C \end{cases} \implies A$ est semblable à C :

En effet soit $(P,Q) \in (\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}))^2$ telles que $\begin{cases} B = P^{-1}AP \\ C = Q^{-1}BQ \end{cases}$.

Alors on a :
$$C = Q^{-1}BQ = Q^{-1}P^{-1}APQ = \left(PQ\right)^{-1}A\left(PQ\right) = R^{-1}AR.$$
Où on a posé $R = PQ$ inversible comme produit de matrices elles-mêmes inversibles.
Par conséquent A et C sont bien semblables.

Propriété 13

- **invariance du rang par similitude :** A et B sont semblables $\Rightarrow rg(A) = rg(B)$ (réciproque fausse).
- **application au calcul des puissances d'une matrice :**
  si $A = PBP^{-1}$ avec $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, alors :
  1. pour tout $k \in \mathbb{N}$: $A^k = PB^kP^{-1}$ vrai pour tout $k \in \mathbb{Z}$ si A ou B est inversible
  2. et pour tout $q \in \mathbb{R}[x]$: $q(A) = Pq(B)P^{-1}$.

Exercice 23. puissances d'une matrice semblable à une matrice diagonale
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. En considérant $\mathscr{B}_1 = (u,v,w)$ la base $\mathscr{B}_\alpha$ de l'exercice **??** avec $\alpha = 1$, montrer que A est semblable à une matrice diagonale.
2. En déduire l'expression de A^k en fonction de $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 24. puissances d'une matrice semblable à une matrice triangulaire
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. En considérant la famille (u,v) où $u = (2,-1)$ et $v = (-1,0)$, montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer l'expression de T^k comme C.L. de T et I_2.
3. En déduire l'expression de A^k comme C.L. de A et I_2 puis en fonction de k.

5. Somme directe de sous-espaces vectoriels

On généralise ici à une famille finie de s.e.v $F_1,\dots,F_p$ la notion de somme directe vue en 1ère année pour $p=2$. L'idée est la même, mais la caractérisation par l'intersection ne se généralise **pas** pour $p\geqslant 3$.

Somme de deux sous-espaces vectoriels (rappels)

Soit F,G deux s.e.v de E.

DÉFINITION

- On appelle **somme** de F et G, notée $F+G$, le sous-ensemble
$$F+G=\left\{x_F+x_G \mid \left(x_F,x_G\in F\times G\right\}$$
- On dit que la somme $F+G$ est **directe**, et on note alors $F+G=F\oplus G$, si tout $x\in F+G$ se décompose **de façon unique** en $x=x_F+x_G$ avec $(x_F,x_G)\in F\times G$.
- Si de plus $F\oplus G=E$, alors on dit que G est un **supplémentaire** de F.

REMARQUE **5.**
On montre sans difficulté que $F+G$ est un s.e.v de E.
Tout s.e.v de E admet un supplémentaire en dimension finie (attention non unique).

EXERCICE 25. Montrer que si $E=\mathrm{Vect}(e_1)\oplus\mathrm{Vect}(e_2)$ alors $E=\mathrm{Vect}(e_1)\oplus\mathrm{Vect}(e_1+e_2)$.

EXERCICE 26 (matrices symétriques et anti-symétriques)**.**
On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques réelles (anti-symétriques réelles) de taille n.
$$\mathscr{S}_n(\mathbb{R})=\left\{M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\mid {}^tM=M\right\}\qquad\text{et}\qquad \mathscr{A}_n(\mathbb{R})=\left\{M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\mid {}^tM=-M\right\}.$$

1. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des s.e.v de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Décomposer M de façon unique en $M=M_s+M_a$ avec $(M_s,M_a)\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\times\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. *Hint : procéder par analyse et synthèse.*
3. En déduire : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})=\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\oplus\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

THÉORÈME 14 (FORMULE DE GRASSMANN)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, alors
$$\boxed{\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G).}$$

PROPRIÉTÉ 15 (CARACTÉRISATION DE LA SOMME DIRECTE DE DEUX S.E.V)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $F+G=F\oplus G$
- $\forall x\in F+G,\ \exists!(x_F,x_G)\in F\times G$ tel que $x=x_F+x_G$;
- $\forall (x_F,x_G)\in F\times G,\ x_F+x_G=0\implies x_F=x_G=0$;
- $F\cap G=\{0\}$;

en dimension finie :

- $\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)$
- si $(e_1,\dots e_p)$ est une base de F et $(e_{p+1},\dots,e_n)$ est une base de G alors la concaténation $(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$ est une base de $F+G$.

EXERCICE 27. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les sous-ensembles suivants :
$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+y+z=0 \text{ et } x-y-z=0\right\}$ et $G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x-2y=0\right\}$.

1. Montrer que F et G sont des s.e.v de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $F\oplus G=\mathbb{R}^3$.
3. Décomposer $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ dans $F\oplus G$.

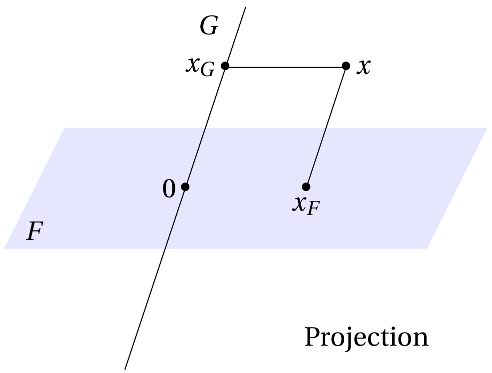
EXERCICE 28. Soient $n\geqslant 3$ et F l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ admettant 1 pour racine de multiplicité $\geqslant 3$.

1. Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}_n[x]$ et que $\left((x-1)^k\right)_{k\in[\![3,n]\!]}$ engendre F.
2. Montrer que la concaténation de $(1,x,x^2)$ et $\left((x-1)^k\right)_{k\in[\![3,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. En déduire $F\oplus\mathbb{R}_2[x]=\mathbb{R}_n[x]$.

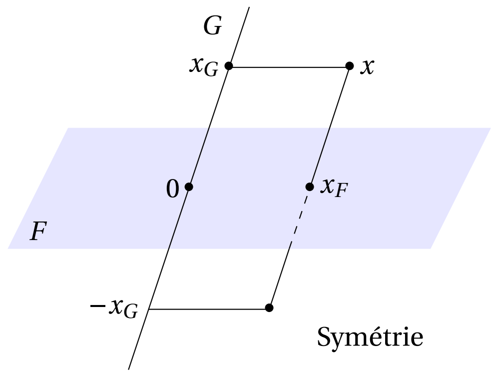
Projecteurs et symétries

DÉFINITION (PROJECTEUR)

Si $E=F\oplus G$, alors tout élément $x\in E$ s'écrit de manière unique $x=x_F+x_G$ où $x_F\in F$ et $x_G\in G$. L'application $x\longrightarrow x_F$ est **la projection** sur F parallèlement à G.



Projection



Symétrie

PROPRIÉTÉ 16 (PROJECTEURS)

- p est un projecteur de $E \iff p \in \mathscr{L}(E)$ et $p^2 = p$.
- si p est un projecteur de E, en posant $F = \Im(p)$ et $G = \text{Ker}\,(p)$:
  1. $E = F \oplus G$
  2. $F = \text{Ker}\,(p - id_E) \rightsquigarrow \forall x \in E, \quad u = \overbrace{p(x)}^{\in F} + \overbrace{x - p(x)}^{\in G}$
  3. p est le projecteur de E sur F parallèlement à G.
  4. $id_E - p$ est le projecteur sur G parrallèlement à F.

REMARQUE **6.**
si $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur alors $Q(x) = x(x-1)$ est annulateur de p.

EXERCICE 29. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\,\text{id}_E = 0$.
En posant $g = f - \text{id}_E$, montrer que $E = \text{Ker}\,(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}\,(f - 2\,\text{id}_E)$.

EXERCICE 30. Montrer que $\Phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f \mapsto \left(x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))\right)$ est un projecteur de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. En déduire que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$ (fonctions paires et impaires) et exprimer la décomposition de f.

DÉFINITION (SYMÉTRIE)

Si $E = F \oplus G$, alors tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$. L'application $u \longrightarrow x_F - x_G$ est **la symétrie** par rapport à F parallèlement à G.

PROPRIÉTÉ 17 (SYMÉTRIES)

- s est une symétrie de $E \iff s \in \mathscr{L}(E)$ et $s^2 = id_E$.
- si s est une symétrie de E, en posant $F = \text{Ker}\,(s - \text{id}_E)$ et $G = \text{Ker}\,(s + \text{id}_E)$:
  1. $E = F \oplus G$;
  2. $\forall x \in E, \quad u = \overbrace{\dfrac{x + s(x)}{2}}^{\in F} + \overbrace{\dfrac{x - s(x)}{2}}^{\in G}$;
  3. s est la symétrie par rapport à Fparallèlement à G;
  4. $-s$ est la symétrie par rapport à G parallèlement à F.

REMARQUE **7.**
si $s \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie alors $Q(x) = (x-1)(x+1)$ est annulateur de s.

EXERCICE 31 (Relation projecteur VS symétrie)**.** Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur de E. On pose

$$s = 2p - \text{id}_E.$$

1. Montrer que s une symétrie de E.
2. Montrer que $\text{Ker}\,(s - \text{id}_E) = \text{Im}(p)$ et que $\text{Ker}\,(s + \text{id}_E) = \text{Ker}\,(p)$.
3. En déduire que s est exactement la symétrie par rapport à $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}\,(p)$.
4. Réciproquement, soit s une symétrie de E. Poser $p = \dfrac{s + \text{id}_E}{2}$ et montrer que p est un projecteur de E.
5. *Application.* Dans $\mathbb{R}^2$, soit $p : (x, y) \mapsto (x, 0)$ (projection sur l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées). Calculer $s = 2p - \text{id}_E$ et vérifier directement que $s^2 = \text{id}_E$. Décrire géométriquement s.

Généralisation à la somme de r s.e.v

Définition (Somme de r sev)

Soient E est un e.v et $F_1,\dots,F_r$ des s.e.v de E.

- On appelle **somme** de $F_1,\dots,F_r$, notée $F_1+\dots+F_r$ ou $\sum_{i=1}^{r} F_i$, le sous-ensemble
$$\sum_{i=1}^{r} F_i = \left\{x_1+\dots+x_r \mid (x_1,\dots,x_r)\in F_1\times\cdots\times F_r\right\}.$$
- On dit que la somme $\sum_{i=1}^{r} F_i$ est directe, et on note alors $\sum_{i=1}^{r} F_i = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$, si tout $x\in F_1+\dots+F_r$ se décompose **de façon unique** en $x = x_1+\dots+x_r$ avec $x_i\in F_i$ pour tout $i\in [\![1;r]\!]$.

Remarque 8.
1. La somme $\sum_{i=1}^{r} F_i$ est un s.e.v de E; c'est le plus petit s.e.v de E contenant $F_1\cup\cdots\cup F_r$.
2. Pour $p\geqslant 3$, « les F_i s'intersectent deux à deux trivialement » ne suffit **pas** à assurer la somme directe.
3. Un exemple fondamental : si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, alors $E=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathrm{Vect}(e_i)$.

Propriété 18

Si $F_1,\dots,F_r$ sont des s.e.v de dimension finie de E, alors :
$$\dim\left(\sum_{i=1}^{r} F_i\right)\leqslant \sum_{i=1}^{r}\dim(F_i)$$

Propriété 19 (caractérisation de la somme directe de p s.e.v)

$$\sum_{I=1}^{r} F_i = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i \iff \left(\forall (u_1,\dots,u_r)\in F_1\times\dots\times F_r,\quad u_1+\dots+u_r=0_E \Rightarrow \forall i,\, u_i=0_E\right).$$

Remarque 9.
On va souvent essayer de décomposer un espace comme somme directe de s.e.v puis essayer de construire des propriétés sur cet espace à partir de propriétés sur chacun des s.e.v intervenant dans la somme. Pour cela on a besoin de la notion de **base adaptée**.

Théorème 20 (Caractérisations en dimension finie)

Pour tout $i\in[\![1;r]\!]$, soit $\mathscr{B}_i$ une base de F_i. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\sum_{i=1}^{r} F_i = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$;
2. la concaténation $\mathscr{B}_1,\dots,\mathscr{B}_r$ est libre ;
3. la concaténation est une base de $F_1+\dots+F_r$;
4. $\dim\left(\sum_{i=1}^{r} F_i\right) = \sum_{i=1}^{r}\dim(F_i)$.

Si de plus $E=\sum_{i=1}^{r} F_i$, la concaténation des $\mathscr{B}_i$ est une **base adaptée** à cette décomposition.

Exercice 32. Dans $\mathbb{R}^2$, poser $F=\mathrm{Vect}\big((1,0)\big)$, $G=\mathrm{Vect}\big((1,1)\big)$, $H=\mathrm{Vect}\big((0,1)\big)$. Montrer que F,G,H sont deux à deux en somme directe et que $F+G+H=\mathbb{R}^2$, mais que cette somme n'est pas directe.

Exercice 33. Dans $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, soient $F=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\middle|\, x-y+z+t=0 \text{ et } x+y-z+t=0\right\}$, $G=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $H=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $F\oplus G\oplus H=\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et donner une base adaptée.
2. Décomposer $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ suivant $F\oplus G\oplus H$.

Exercice 34. Soit $E=\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note F_1 les fonctions nulles sur $\mathbb{R}_-$, F_2 les fonctions nulles sur $\mathbb{R}_+$, F_3 les fonctions constantes.

1. Montrer que F_1,F_2,F_3 sont des sev de E et que $E=F_1\oplus F_2\oplus F_3$.
2. Décomposer exp suivant $F_1\oplus F_2\oplus F_3$.

REMARQUE **10.**
La notion de base adaptée est particulièrement utile pour reconstruire une application linéaire à partir de la restriction à chacun des s.e.v d'une décomposition en somme directe.

THÉORÈME 21

Supposons que $E=\bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ et pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, soit $u_i \in \mathscr{L}(F_i,F)$.
Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $u_{|F_i}=u_i$ pour tout $i \in [\![1;r]\!]$.

Matrices par blocs (hors-programme)

Nota-bene : lors de l'écrit, les propriétés de cette sous-section seront redémontrées.

DÉFINITION (FAMILLE DE PROJECTEURS ADAPTÉE À UNE DÉCOMPOSITION)

Supposons que $E=\bigoplus_{i=1}^{r} F_i$. On note p_i le projecteur sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} F_i$.
Alors la famille $(p_1,\dots,p_r)$ est appelée **famille de projecteurs associée à la décomposition en somme directe**.

PROPRIÉTÉ 22

Soit $(p_1,\dots,p_r)$ la famille de projecteurs associée à la décomposition en somme directe $E=\bigoplus_{i=1}^{r} F_i$, alors :

- $\sum_{I=1}^{r} p_i = id_E$
- $\forall i\neq j,\quad p_i\circ p_j=0$

DÉFINITION (MATRICE PAR BLOCS)

Soient $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B\in\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{R})$, $C\in\mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ et $D\in\mathscr{M}_{m,q}(\mathbb{R})$, on peut définir une matrice $M\in\mathscr{M}_{n+m,p+q}(\mathbb{R})$ **par blocs** de la façon suivante :

$$M=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}$$

REMARQUE **11.** 1. Les règles de produits matriciels classiques s'appliquent aux matrices par blocs :

- **produit :** $\begin{pmatrix} A & C\\ B & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & G\\ F & H\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AE+CF & AG+CH\\ BE+DF & BG+DH\end{pmatrix}$.
- **transposition :** $M^T=\begin{pmatrix} A^t & B^t\\ C^t & D^t\end{pmatrix}$

2. Plus généralement on peut définir une matrice par blocs de la façon suivante :

$$M=\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p}\\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,p}\end{pmatrix}$$

où les A_{ij} sont des matrices de tailles compatibles.

THÉORÈME 23

Supposons que $E=\bigoplus_{i=1}^{r} F_i$, $\mathscr{B}_i$ soit une base de F_i et $\mathscr{B}$ la concaténation des $\mathscr{B}_i$ formant une base adaptée à cette décomposition.
Soit $u\in\mathscr{L}(E)$ et $(p_1,\dots,p_r)$ la famille de projecteurs associée à cette décomposition.
Alors la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est obtenue comme la matrice par blocs des $A_{i,j}$ où $A_{i,j}$ est la matrice de $p_i\circ u\circ p_j$ dans les bases $\mathscr{B}_j$ et $\mathscr{B}_i$.

6. Sous-espaces stables par un endomorphisme

Pour un endomorphisme u de E, on cherche des sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires de sorte que F et G soient stables par u. En effet, dans une base adaptée à la décomposition $E=F\oplus G$, nous allons voir que la matrice de u est particulièrement simple.

DÉFINITION (SEV STABLE, ENDOMORPHISME INDUIT)

Soit E un e.v et $u\in\mathscr{L}(E)$.
F est **stable par** u si $u(F)\subset F$. Dans ce cas, la restriction $u_{|F}: F\longrightarrow F$ est un endomorphisme de F, appelé **endomorphisme induit par** u **sur** F.

REMARQUE **12.**
$\{0_E\}$ et E sont toujours stables par u de même que $\mathrm{Ker}\,(u)$, $\mathrm{Im}(u)$

PROPRIÉTÉ 24 (STABILITÉ ET COMMUTATION)

- Pour $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, Ker (u) et Im(u) sont stables par v.
- Pour $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[x]$, Ker $(P(u))$ et Im$(P(u))$ sont stables par u.

REMARQUE **13.**
On en déduit par exemple que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les noyaux Ker $(u - \lambda\, \mathrm{id}_E)$ sont stables par u. Ces sous-espaces vont jouer un rôle très particulier lorsque nous chercherons à « réduire » l'endomorphisme u ($\rightsquigarrow$ voir le chapitre **Réduction**).

THÉORÈME 25 (LEMME DES NOYAUX - HORS PROGRAMME)

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P = P_1 \dots P_r \in \mathbb{R}[X]$ tel que les P_i soient premiers entre eux[1] deux à deux alors :
$$\mathrm{Ker}\,(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\,(P_i),$$
La projection p_i sur Ker (P_i) parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \mathrm{Ker}\,(P_j)$ est un polynôme en u.

REMARQUE **14.**
Lorsque P est annulateur de u on a $E = \mathrm{Ker}\,(P(u))$ et on obtient ainsi une décomposition de E est somme directe de s.e.v stables par u. Cette remarque joue un rôle central dans la réduction des endomorphismes.

PROPRIÉTÉ 26 (LECTURE SUR LA MATRICE DANS UNE BASE ADAPTÉE)

Soient E de dimension n, F s.e.v de dimension $p \in [\![1, n-1]\!]$, $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F complétée en $(e_1, \dots, e_n)$ base de E. Alors :
$$F \text{ est stable par } u \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$
où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est la matrice de l'endomorphisme induit par f sur F.

Plus généralement : si $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ et $\mathscr{B}$ est adaptée à cette décomposition, alors :
les F_i sont tous stables par $u \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est **diagonale par blocs**.

EXERCICE 35 (Stabilité et matrices triangulaires).
Soient E de dimension finie n, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Montrer que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est triangulaire supérieure
$\iff$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ est stable par u.

1. **Théorème de Bézout :** (P, Q) sont premiers entre eux $\iff \exists (U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que $UP + VQ = 1$.

7. Trace d'une matrice carrée

La trace est la forme linéaire la plus simple sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: elle lit la diagonale. Ses propriétés d'invariance par conjugaison en font un invariant fondamental des endomorphismes.

DÉFINITION (TRACE D'UNE MATRICE)

La **trace** de $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

PROPRIÉTÉ 27 (PROPRIÉTÉS OPÉRATOIRES)

1. **linéarité :** l'application $\mathrm{Tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une **forme linéaire** non nulle sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
2. **transposée :** $\mathrm{Tr}\left({}^tA\right) = \mathrm{Tr}(A)$
3. **cyclicité du produit :** $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$
4. **invariance par similitude :** $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A)$ pour tout $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$

EXERCICE 36.

1. (a) Montrer que $F = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 0\right\}$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Décrire cet hyperplan pour $n = 2$.
2. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.

REMARQUE **15.**
La propriété 4 permet de définir la trace d'un **endomorphisme** :

DÉFINITION (TRACE D'UN ENDOMORPHISME)

Pour $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{Tr}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\big)$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie.
On peut donc poser $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u))$ pour une base $\mathscr{B}$ particulière.

EXERCICE 37. Montrer qu'il n'existe pas $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_E$.

EXERCICE 38. On fixe $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on définit $\varphi_S : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par :
$$\varphi_S(M) = \mathrm{Tr}(M) \cdot S.$$

3. Montrer que φ_S est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Déterminer Ker (φ_S) et Im(φ_S) selon les cas $S = 0$ et $S \neq 0$.

5. Calculer $\varphi_S \circ \varphi_S$. En déduire que si $\mathrm{Tr}(S) \neq 0$, alors $\frac{1}{\mathrm{Tr}(S)}\varphi_S$ est un projecteur. Déterminer ses sous-espaces caractéristiques.
6. Calculer $\mathrm{tr}(\varphi_S)$ (la trace de l'endomorphisme φ_S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) en fonction de $\mathrm{Tr}(S)$.

Propriété 28 (Matrice d'un projecteur dans une base adaptée)

Remarque **16.**
Ce résultat ultra classique n'est pas au programme. Il faudra donc le re-démontrer le jour J.

Théorème 29 (Trace des projecteurs)

Soit E un e.v de dimension $n \geqslant 1$, p un projecteur de E de **rang** $r \in [[1;n]]$ et $\mathscr{B}$ une base adaptée à la décomposition en somme directe $E = Im(p) \oplus \mathrm{Ker}\,(p)$.
Alors on a :
$Mat_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
En particulier :
$$\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p).$$

Remarque **17.**
Là encore ce résultat n'est pas au programme. Il était demandé de le re-démontré dans le sujet EML 2026 par exemple!

8. Compléments : endomorphismes nilpotents

HORS PROGRAMME ECG. Ce complément prolonge le Chapitre 2 (Algèbre linéaire — rappels et compléments). Il n'utilise aucune notion de valeur propre ou vecteur propre : uniquement les noyaux itérés, la stabilité (section 6 du chapitre) et la trace (section 7).

Définition (Endomorphisme nilpotent)

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est **nilpotent** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. Le plus petit entier k vérifiant cette propriété est appelé **indice de nilpotence** de u, noté ν.

Lemme 30 (Croissance des noyaux itérés)

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. La suite $\left(\mathrm{Ker}\,(u^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion :
$$\{0_E\} = \mathrm{Ker}\,(u^0) \subset \mathrm{Ker}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(u^2) \subset \cdots$$
De plus, dès qu'une égalité $\mathrm{Ker}\,(u^k) = \mathrm{Ker}\,(u^{k+1})$ est vérifiée pour un certain k, alors $\mathrm{Ker}\,(u^j) = \mathrm{Ker}\,(u^k)$ pour tout $j \geqslant k$.

Stabilisation des noyaux itérés

- ▷ **Croissance.** Si $u^k(x) = 0_E$ alors $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0_E) = 0_E$, d'où $\mathrm{Ker}\,(u^k) \subset \mathrm{Ker}\,(u^{k+1})$.
- ▷ **Stabilisation.** Supposons $\mathrm{Ker}\,(u^k) = \mathrm{Ker}\,(u^{k+1})$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(u^{k+2})$, c'est-à-dire $u^{k+1}(u(x)) = 0_E$, donc $u(x) \in \mathrm{Ker}\,(u^{k+1}) = \mathrm{Ker}\,(u^k)$, d'où $u^{k+1}(x) = 0_E$: ainsi $x \in \mathrm{Ker}\,(u^{k+1})$. On a donc $\mathrm{Ker}\,(u^{k+2}) \subset \mathrm{Ker}\,(u^{k+1})$, l'inclusion réciproque étant la croissance ci-dessus : égalité. On conclut par récurrence.

Propriété 31 (Majoration de l'indice de nilpotence)

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent non nul, $\dim E = n$. Alors l'indice de nilpotence ν de u vérifie $\nu \leqslant n$.

Preuve de la majoration : Par minimalité de ν, pour tout $k < \nu$ on a $u^k \neq 0$ et $u^{k+1} \neq u^k$ au sens de l'égalité des noyaux (sinon le lemme précédent donnerait $\mathrm{Ker}\,(u^k) = \mathrm{Ker}\,(u^\nu) = E$, contredisant $u^k \neq 0$). Les inclusions
$$\{0_E\} = \mathrm{Ker}\,(u^0) \subsetneq \mathrm{Ker}\,(u) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}\,(u^\nu) = E$$
sont donc toutes strictes. D'après la Propriété 6 du chapitre (inclusion stricte ⇒ dimension strictement croissante), chaque saut augmente la dimension d'au moins 1, donc la chaîne comporte au plus $n+1$ termes : $\nu \leqslant n$. □

Exercice 39. Soit E de dimension 4 et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$. Justifier que $\nu = 3$ et donner toutes les inclusions strictes possibles entre les $\mathrm{Ker}\,(u^k)$, $k = 0, 1, 2, 3$, en précisant les dimensions compatibles.

Propriété 32 (Forme normale)

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice $\nu = n = \dim E$. Il existe une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que

$$u(e_1) = 0_E \quad \text{et} \quad u(e_i) = e_{i-1} \text{ pour } i \in [\![2; n]\!].$$

Dans cette base :

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Construction de la base adaptée : Comme $u^{n-1} \neq 0$ (car $\nu = n$), il existe $e_n \in E$ tel que $u^{n-1}(e_n) \neq 0$. On pose $e_i = u^{n-i}(e_n)$ pour $i \in [\![1; n]\!]$ (de sorte que $e_n = e_n$, $e_{n-1} = u(e_n)$, ..., $e_1 = u^{n-1}(e_n)$).

- ▷ **Famille libre.** Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$, on applique u^{n-1} : tous les termes s'annulent sauf celui en e_1 via λ_n (car $u^{n-1}(e_i) = 0$ dès que $i < n$, par définition de e_i comme image de e_n par une puissance de u supérieure à $n-i$), ce qui force $\lambda_n u^{n-1}(e_n) = 0$ donc $\lambda_n = 0$. On réitère avec u^{n-2}, etc. (raisonnement par degrés décroissants, dans l'esprit de la Propriété 4.4 du chapitre sur l'échelonnement).
- ▷ **Base.** Famille libre de cardinal $n = \dim E$: c'est une base (Propriété 5 du chapitre).
- ▷ **Image par u.** Par construction $u(e_i) = u(u^{n-i}(e_n)) = u^{n-i+1}(e_n) = e_{i-1}$ pour $i \geqslant 2$, et $u(e_1) = u^n(e_n) = 0_E$ car $\nu = n$. □

Exercice 40. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Vérifier que u est nilpotent et déterminer son indice ν.
2. Pour $k \in [\![0; 3]\!]$, calculer $\dim \mathrm{Ker}\,(u^k)$.
3. Retrouver la base (e_1, e_2, e_3) de la méthode de construction ci-dessus en partant de $e_3 = (0, 0, 1)$.

Propriété 33 (Trace d'un endomorphisme nilpotent)

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent, alors $\mathrm{tr}(u) = 0$.

Preuve : Si $\nu = n$, le résultat est immédiat : la matrice de u dans la base adaptée construite ci-dessus a une diagonale nulle, donc $\mathrm{tr}(u) = 0$ (et la trace ne dépend pas de la base choisie, cf. Remarque sur la trace d'un endomorphisme). Si $\nu < n$, on raisonne sur $F = (u^{\nu-1})$, qui est stable par u (Remarque 12 du chapitre : $(u^{\nu-1})$ est toujours stable par u), et on complète une base adaptée à $E = F \oplus G$ pour se ramener par blocs triangulaires (Propriété 25) au cas précédent sur chaque bloc nilpotent. □

Exercice 41. Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice ν.

1. Montrer que $I_n + N$ est inversible et que $(I+N)^{-1} = \sum_{k=0}^{\nu-1} N^k$
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n comme CL de I_3, A et A^2.

Compléments : matrices et endomorphismes de permutation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation de $[\![1; n]\!]$.

Définition (Endomorphisme et matrice de permutation)

On note $u_\sigma \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ l'unique endomorphisme défini par

$$u_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}, \quad i \in [\![1; n]\!],$$

et $P_\sigma = \mathrm{Mat}_B(u_\sigma)$ sa matrice dans la base canonique : P_σ possède un unique coefficient 1 par ligne et par colonne, tous les autres coefficients étant nuls.

Propriété 34 (Composition et inversibilité)

Pour tous $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$:

$$u_\sigma \circ u_\tau = u_{\sigma\circ\tau} \qquad \text{et} \qquad P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\circ\tau}.$$

En particulier, u_σ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$, $P_\sigma \in GL_n(\mathbb{R})$, et

$$P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}} = {}^t P_\sigma.$$

Preuve :

- **Composition.** Sur les vecteurs de base : $(u_\sigma \circ u_\tau)(e_i) = u_\sigma(e_{\tau(i)}) = e_{\sigma(\tau(i))} = u_{\sigma\circ\tau}(e_i)$. Deux applications linéaires coïncidant sur une base sont égales (cf. introduction de la section 3 du chapitre), d'où $u_\sigma \circ u_\tau = u_{\sigma\circ\tau}$, puis $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\circ\tau}$ par la Propriété 7 (composition $\leftrightarrow$ produit matriciel).
- **Inversibilité.** En prenant $\tau = \sigma^{-1}$: $P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\text{id}} = I_n$, donc P_σ est inversible d'inverse $P_{\sigma^{-1}}$ (et u_σ est un automorphisme par la caractérisation des isomorphismes, Propriété 8).
- $P_\sigma^{-1} = {}^tP_\sigma$**, preuve directe par les coefficients.** Par définition, la j-ème colonne de P_σ est $\text{Mat}_B(e_{\sigma(j)})$, donc le coefficient (i,j) de P_σ vaut

$$(P_\sigma)_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculons alors le coefficient (i,j) de ${}^tP_\sigma\, P_\sigma$:

$$\left({}^tP_\sigma\, P_\sigma\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (P_\sigma)_{k,i}\,(P_\sigma)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{k,\sigma(i)}\,\delta_{k,\sigma(j)}.$$

Dans cette somme, le seul terme non nul (le cas échéant) est celui correspondant à $k = \sigma(i)$, qui vaut $\delta_{\sigma(i),\sigma(j)}$. Or σ est **injective** (c'est une bijection), donc

$$\sigma(i) = \sigma(j) \iff i = j,$$

d'où $\delta_{\sigma(i),\sigma(j)} = \delta_{i,j}$. On obtient ainsi $\left({}^tP_\sigma\, P_\sigma\right)_{i,j} = \delta_{i,j}$ pour tous i, j, c'est-à-dire ${}^tP_\sigma\, P_\sigma = I_n$. Comme P_σ est déjà connue inversible (point précédent), cette égalité donne directement $P_\sigma^{-1} = {}^tP_\sigma$ (une matrice carrée admettant un inverse à gauche et étant inversible coïncide avec cet inverse).

□

Propriété 35 (Rang de $P_\sigma - I_n$)

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et r le nombre d'orbites de σ (c'est-à-dire le nombre de cycles disjoints, points fixes compris, dans la décomposition de σ). Alors :

$$\text{rg}(P_\sigma - I_n) = n - r.$$

Preuve : Décomposons $\sigma = c_1 \cdots c_r$ en cycles à supports disjoints $S_1, \dots, S_r$ (partition de $[\![1;n]\!]$). Pour chaque j, le sous-espace $F_j = \text{Vect}(e_i,\ i \in S_j)$ est stable par u_σ : si $i \in S_j$ alors $\sigma(i) \in S_j$ (le cycle c_j agit à l'intérieur de son support), donc $u_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \in F_j$. On a $\mathbb{R}^n = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ (somme directe car les S_j partitionnent $[\![1;n]\!]$), et dans une base adaptée à cette décomposition, $\text{Mat}_B(u_\sigma)$ est diagonale par blocs (Propriété 25, cas généralisé).
Sur chaque bloc F_j associé à un cycle de longueur $\ell_j = \text{card}(S_j)$, l'élément $w_j = \sum_{i\in S_j} e_i$ vérifie $u_\sigma(w_j) = w_j$ (le cycle permute circulairement les e_i de S_j, donc préserve leur somme), si bien que $\text{Ker}\,(u_\sigma - \text{id})|_{F_j} \supset \text{Vect}(w_j)$, qui est de dimension exactement 1 (on vérifie qu'aucune autre combinaison linéaire des e_i, $i \in S_j$, n'est fixe par un cycle de longueur $\geqslant 2$, sauf multiples de w_j).
En sommant sur les r blocs : $\dim \text{Ker}\,(u_\sigma - \text{id}) = r$. Le théorème du rang appliqué à $u_\sigma - \text{id} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ donne alors

$$\text{rg}(u_\sigma - \text{id}) = n - \dim \text{Ker}\,(u_\sigma - \text{id}) = n - r,$$

soit $\text{rg}(P_\sigma - I_n) = n - r$ via la Propriété 10 (rang d'une application linéaire = rang de sa matrice).
□

Exercice 42. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère $\sigma = (1\ 2\ 3)$ (cycle sur $\{1,2,3\}$, 4 fixe).

1. Écrire explicitement P_σ.
2. Déterminer le nombre d'orbites r de σ et en déduire $\text{rg}(P_\sigma - I_4)$ sans calcul matriciel.
3. Vérifier le résultat par un calcul direct de rang (pivot de Gauss sur $P_\sigma - I_4$).

Propriété 36 (Trace d'une matrice de permutation)

$$\text{tr}(P_\sigma) = \text{card}(\{i \in [\![1;n]\!] \mid \sigma(i) = i\}) \quad \text{(nombre de points fixes de } \sigma).$$

Preuve : Par définition, le coefficient (i,i) de P_σ vaut 1 si $\sigma(i) = i$ et 0 sinon (l'unique 1 de la i-ème colonne est en ligne $\sigma(i)$). La trace, somme des coefficients diagonaux (section 7 du chapitre), compte donc exactement le nombre d'indices fixes par σ.
□

Exercice 43. Soient $\sigma = (1\ 2)$ et $\tau = (2\ 3)$ dans $\mathfrak{S}_3$ (transpositions).

1. Calculer $\text{tr}(P_\sigma)$ et $\text{tr}(P_\tau)$.
2. Calculer $\sigma \circ \tau$ et $\tau \circ \sigma$: vérifier qu'elles diffèrent, et calculer $\text{tr}(P_{\sigma\circ\tau})$ et $\text{tr}(P_{\tau\circ\sigma})$.
3. Comparer avec la propriété de cyclicité $\text{tr}(P_\sigma P_\tau) = \text{tr}(P_\tau P_\sigma)$ (Propriété 27) : que peut-on en conclure sur le lien entre $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ et $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$?

Propriété 37 (Sous-espaces stables, cas d'un n-cycle)

Soit σ un n-cycle de $[\![1;n]\!]$ ($n \geqslant 2$) et u_σ l'endomorphisme associé. Posons

$$D = \mathrm{Vect}(e_1 + \cdots + e_n) \qquad \text{et} \qquad H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}.$$

Alors D et H sont stables par u_σ, et $\mathbb{R}^n = D \oplus H$.

Preuve :

- ▷ **Stabilité de D.** u_σ permute circulairement les e_i donc préserve leur somme : $u_\sigma(e_1 + \cdots + e_n) = e_1 + \cdots + e_n \in D$.
- ▷ **Stabilité de H.** H est l'hyperplan noyau de la forme linéaire $\varphi : (x_i) \mapsto \sum x_i$ (Théorème 9 de caractérisation des hyperplans). Pour $x \in H$, $u_\sigma(x)$ a pour coordonnées celles de x réarrangées par σ, donc $\varphi(u_\sigma(x)) = \varphi(x) = 0$: ainsi $u_\sigma(x) \in H$.
- ▷ **Somme directe.** D est une droite, H un hyperplan, donc $\dim D + \dim H = 1 + (n-1) = n$. Comme $D \cap H = \{0\}$ (un vecteur constant non nul a une somme de coordonnées non nulle dès que $n \geqslant 1$), la Propriété 15 du chapitre donne $D \oplus H = \mathbb{R}^n$. □

Dans une base adaptée $(e_1 + \cdots + e_n,\ f_2, \dots, f_n)$ avec $(f_2, \dots, f_n)$ base de H, la matrice de u_σ est diagonale par blocs $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ avec $N \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ (Propriété 25).

Exercice 44. On reprend σ un 3-cycle de $\iint$ 13, par exemple $\sigma = (1\ 2\ 3)$.

1. Donner une base (f_2, f_3) de l'hyperplan H de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de u_σ dans la base $(e_1 + e_2 + e_3,\ f_2,\ f_3)$ et vérifier qu'elle est bien diagonale par blocs 1×1 et 2×2.
3. Retrouver $\mathrm{tr}(P_\sigma)$ à partir de cette nouvelle matrice (la trace ne dépend pas de la base, Remarque sur la trace d'un endomorphisme) et comparer avec le calcul direct sur P_σ.

Appendice — Permutations de $[\![1;n]\!]$ et cycles

HORS PROGRAMME ECG. Cet appendice donne le strict nécessaire, sans théorie du groupe symétrique, pour manipuler les permutations utilisées dans la section suivante.

Définition (Permutation)

Une **permutation** de $[\![1;n]\!]$ est une bijection $\sigma : [\![1;n]\!] \longrightarrow [\![1;n]\!]$. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$.
Notation pratique : on écrit σ sous forme de tableau

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

la seconde ligne donnant les images.

Exemple. Pour $n = 5$, la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

envoie 1 sur 3, 2 sur 1, 3 sur 5, 4 sur 4 (fixe), 5 sur 2.

Définition (Cycle - transposition)

- Soit $i_1, \dots, i_\ell \in [\![1;n]\!]$ deux à deux distincts ($\ell \geqslant 2$). Le **cycle** $(i_1\ i_2\ \cdots\ i_\ell)$ est la permutation c définie par

$$c(i_1) = i_2,\ c(i_2) = i_3,\ \dots,\ c(i_{\ell-1}) = i_\ell,\ c(i_\ell) = i_1,$$

  et $c(j) = j$ pour tout $j \notin \{i_1, \dots, i_\ell\}$. L'entier ℓ est la **longueur** du cycle, et $\{i_1, \dots, i_\ell\}$ son **support**.
  Par convention, un point fixe j (i.e. $\sigma(j) = j$) est vu comme un cycle de longueur 1 : (j).
- Une **transposition** est un cycle de longueur 2.

Exemple. Dans $\mathfrak{S}_5$:

- Le cycle $(1\ 3\ 5) = (1\ 3\ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ envoie $1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 1$, et fixe 2 et 4 :

- La transposition $(2\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ (échange 2 et 4, fixe le reste).

Un cycle se lit circulairement : $(1\ 3\ 5) = (3\ 5\ 1) = (5\ 1\ 3)$ désignent la même permutation, mais $(1\ 5\ 3)$ (sens inverse) est différente.

Définition (Orbite d'un élément)

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $i \in [\![1;n]\!]$, l'**orbite** de i sous σ est l'ensemble

$$\mathrm{Orb}_\sigma(i) = \{i,\ \sigma(i),\ \sigma^2(i),\ \sigma^3(i),\ \ldots\}$$

obtenu en itérant σ à partir de i (cet ensemble est fini et on revient à i au bout d'un nombre fini d'itérations, puisque $[\![1;n]\!]$ est fini).

Exemple. Reprenons $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ de l'exemple précédent. Calculons les orbites (notées $\mathrm{Orb}_\sigma(i)$) :

- ▷ en partant de 1 : $1 \longrightarrow \sigma(1) = 3 \longrightarrow \sigma(3) = 5 \longrightarrow \sigma(5) = 2 \longrightarrow \sigma(2) = 1$. On revient à 1 : orbite $\{1,3,5,2\}$.
- ▷ en partant de 4 : $4 \longrightarrow \sigma(4) = 4$. Orbite $\{4\}$ (point fixe).

Les orbites $\{1,2,3,5\}$ et $\{4\}$ forment une **partition** de $[\![1;5]\!]$: tout élément appartient à exactement une orbite.

Propriété 38 (Décomposition en cycles à supports disjoints : Admis)

Toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ s'écrit de façon unique (à l'ordre près des facteurs) comme un produit (composée) de cycles dont les supports sont les orbites de σ, deux à deux disjoints :

$$\sigma = c_1 \circ c_2 \circ \cdots \circ c_r,$$

où r est le nombre d'orbites de σ et chaque c_j est le cycle qui décrit l'action de σ sur son orbite (un point fixe correspondant à un cycle de longueur 1, souvent omis dans l'écriture).

Idée de preuve (on admet ce résultat) : L'idée est simple : on vient de voir que les orbites partitionnent $[\![1;n]\!]$, et σ agit « circulairement » sur chaque orbite (c'est exactement la définition d'un cycle) — il suffit de lire pour chacune l'ordre dans lequel σ fait « tourner » ses éléments. Les cycles obtenus commutent entre eux (supports disjoints), donc l'ordre d'écriture importe peu.

Comment décomposer σ en pratique

1. Partir du plus petit élément non encore traité, disons i.
2. Calculer $\sigma(i), \sigma^2(i), \ldots$ jusqu'à revenir à i : cela donne un cycle.
3. Recommencer avec le plus petit élément non encore visité, jusqu'à épuiser $[\![1;n]\!]$.

Exemple. Reprenons $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. On a trouvé les orbites $\{1,3,5,2\}$ et $\{4\}$. En suivant l'orbite de 1 : $1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$, donc

$$\sigma = (1\ 3\ 5\ 2),$$

4 étant fixe (cycle de longueur 1, omis). On dit que σ est ici un **4-cycle** (un seul cycle non trivial, de longueur 4).

Exercice 1 : Décomposer en cycles à supports disjoints, en suivant la méthode ci-dessus (calcul des orbites), la permutation de $[\![1;7]\!]$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Combien d'orbites σ possède-t-elle ? Quelle est la longueur de chaque cycle ?

Exercice 2 : On considère $\tau = (1\ 2)(3\ 4\ 5)$ dans $\mathfrak{S}_5$ (composée de deux cycles à supports disjoints, donnée directement sous forme décomposée).

1. Écrire τ sous forme de tableau $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que les orbites de τ sont bien $\{1,2\}$ et $\{3,4,5\}$.
3. Calculer τ^2. Est-ce encore un produit de cycles disjoints ? Lesquels ?

☞ *Remarque:* Le **nombre d'orbites** r d'une permutation σ (points fixes compris) est exactement la quantité qui intervient dans le calcul de $\mathrm{rg}(P_\sigma - I_n) = n - r$ vu dans la section précédente : chaque orbite « fournit » une dimension de $\mathrm{Ker}\,(u_\sigma - \mathrm{id})$, via le vecteur somme des e_i de l'orbite.